# CONDIÇÕES CONVEXAS NECESSÁRIAS E SUFICIENTES PARA A ESTABILIZABILIDADE QUADRÁTICA DE SISTEMAS NEBULOSOS DE TAKAGI-SUGENO

Vinícius F. Montagner*, Ricardo C. L. F. Oliveira†, Pedro L. D. Peres†

*Grupo de Eletrônica de Potência e Controle
Universidade Federal de Santa Maria, 97105-900, Santa Maria, RS, Brasil

†Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas, CP 6101, 13081-970, Campinas, SP, Brasil

Emails: montagne@smail.ufsm.br, ricfow@dt.fee.unicamp.br, peres@dt.fee.unicamp.br

**Abstract**— This paper provides necessary and sufficient finite dimensional linear matrix inequality conditions to compute linearly parameter-dependent state feedback controllers ensuring quadratic stability for Takagi-Sugeno fuzzy systems. The proposed conditions, based on an extension of Pólya's Theorem, are formulated as progressively less conservative sets of linear matrix inequalities. As a consequence, the quadratic stabilizability problem for this class of systems can be solved whenever a solution exists. The maximization of the decay rate of the state trajectories under quadratic stability is also addressed. The efficiency of the proposed conditions is illustrated by means of numerical examples.

**Keywords**— Takagi-Sugeno fuzzy systems, Quadratic stabilizability, Linear matrix inequalities, Polytopic systems, Exponential stability.

**Resumo**— Este artigo fornece condições na forma de desigualdades matriciais lineares de dimensão finita que são necessárias e suficientes para computar controladores por realimentação de estados linearmente dependentes de parâmetros, assegurando a estabilidade quadrática de sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno. As condições propostas, baseadas em uma extensão do Teorema de Pólya, são formuladas como conjuntos de desigualdades matriciais lineares progressivamente menos conservadores. Assim, o problema de estabilizabilidade quadrática para essa classe de sistemas pode ser resolvido sempre que uma solução existir. A maximização da taxa de decaimento das trajetórias dos estados sob estabilidade quadrática também é tratada. A eficiência das condições propostas é ilustrada por meio de exemplos numéricos.

**Palavras-chave**— Sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno, Estabilizabilidade quadrática, Desigualdades matriciais lineares, Sistemas politópicos, Estabilidade exponencial.

## 1 Introdução

Sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno permitem representar globalmente sistemas não-lineares por meio da combinação de modelos lineares, que representam localmente o sistema não-linear em diferentes regiões do espaço de estados. Dessa forma, tem-se uma metodologia sistemática de modelagem, análise e controle de sistemas não-lineares, como pode ser visto no livro (Tanaka and Wang, 2001) e também nos artigos (Wang et al., 1996; Tanaka et al., 1996; Tanaka et al., 1998a; Tanaka et al., 1998b; Cao and Frank, 2000; Chen et al., 2000; Chen et al., 1999). Abordagens baseadas em funções de Lyapunov têm sido largamente utilizadas no contexto de sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno, como por exemplo nas referências (Kim and Lee, 2000; Tuan et al., 2001; Lian et al., 2001; Nguang and Shi, 2003; Johansson et al., 1999; Johansson, 2003; Feng, 2003; Teixeira et al., 2003; Feng, 2006; Kumar et al., 2006), fornecendo condições para verificação de estabilidade e para projeto de controladores que freqüentemente são expressas como desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs), que são muito atrativas pois podem ser solucionadas em tempo polinomial por meio de algoritmos de convergência global (Boyd et al., 1994; Gahinet et al., 1995; Sturm, 1999). Com respeito ao projeto de controle para sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno, uma escolha natural é o chamado compensador paralelo distribuído, no qual uma lei de controle é projetada para cada regra do modelo nebuloso, fornecendo um controlador global que é dado pela combinação dos controladores locais, sendo a estabilidade global garantida, por exemplo, pela existência de uma função de Lyapunov quadrática (Wang et al., 1996; Tanaka et al., 1998a; Tanaka and Wang, 2001). Essa estratégia de controle tem sido largamente empregada no contexto de realimentação de estados e de realimentação dinâmica de saída e, devido à formulação do problema de projeto ser baseada em LMIs, várias restrições de projeto podem ser levadas em consideração, como limitações da entrada de controle, alocação de pólos para cada subsistema linear, limitantes da taxa de decaimento das trajetórias, limitantes das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do sistema, entre outras (Chen et al., 1999; Chen et al., 2000; Nguang and Shi, 2003; Cao and Frank, 2000; Xu and Lam, 2005; Tanaka et al., 1998b; Lian et al., 2001).

Um aspecto comum em muitas condições de projeto de controle para sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno é que os resultados se baseiam na existência de uma função de Lyapunov quadrática que assegura a estabilidade global do sistema em malha fechada. Em outras palavras, a existência de um controlador por realimentação de estados linearmente dependente de parâmetros é equivalente à existência de uma matriz simétrica definida positiva $W$ e de uma matriz linearmente dependente de parâmetros $Z(\alpha)$ resolvendo, para todo $\alpha$ (um vetor de parâmetros pertencentes, para todo tempo, ao simplex unitário) a LMI dependente de parâmetros que caracteriza a estabilizabilidade quadrática, dada por

$$A(\alpha)W + WA(\alpha)' + B(\alpha)Z(\alpha) + Z(\alpha)'B(\alpha)' < 0$$

em que $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ são expressas como combinações convexas das matrizes dos subsistemas do modelo nebuloso. Como discutido em (Tuan et al., 2001), $Z(\alpha)$ (e, conseqüentemente, $K(\alpha)$) pode ser restrita à classe de matrizes linearmente dependentes de parâmetros, sem perda de generalidade. Entretanto, a solução dessa LMI dependente de parâmetros para todo $\alpha$ no simplex unitário é um problema de dimensão infinita. Explorando o fato de a LMI dependente de parâmetros dada acima poder ser expressa como uma LMI quadraticamente dependente de parâmetros, condições suficientes, convexas, de dimensão finita podem ser utilizadas para testá-la, como por exemplo em (Tanaka and Wang, 2001, Section 3.3). LMIs relaxadas para a estabilizabilidade quadrática foram propostas em (Tanaka et al., 1998a; Teixeira et al., 2003; Tuan et al., 2001) mas, no conhecimento dos autores do presente artigo, essas e outras condições existentes na literatura são apenas suficientes para a síntese de controladores quadraticamente estabilizantes por realimentação de estados linearmente dependente de parâmetros.

O objetivo principal deste artigo é fornecer um procedimento sitemático de construção de LMIs de dimensão finita que são necessárias e suficientes para resolver o problema da estabilizabilidade quadrática, o que é equivalente a verificar a existência de um ganho de realimentação de estados linearmente dependentes de parâmetros assegurando a estabilidade quadrática em malha fechada de sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno. A solução do problema fornece uma matriz para a função de Lyapunov e os ganhos localmente estabilizantes de um compensador paralelo distribuído. Dadas as matrizes de um modelo nebuloso de Takagi-Sugeno, as condições propostas, baseadas na extensão do Teorema de Pólya (Hardy et al., 1952) dada em (Oliveira and Peres, 2005) (veja também (Scherer, 2005; Scherer and Hol, 2006; Oliveira and Peres, 2005)), fornecem conjuntos de LMIs que têm um número fixo de variáveis de decisão, mas que são progressivamente menos conservadores. Como uma extensão do resultado principal, um problema de autovalores generalizados é fornecido para maximizar a taxa de decaimento das trajetórias dos estados sob a estabilidade quadrática. Resultados numéricos ilustram a eficiência das condições propostas.

## 2 Descrição do problema

Considere a $i$-ésima regra de um sistema nebuloso de Takagi-Sugeno contínuo no tempo, dada por (Tanaka and Wang, 2001)

$$\begin{aligned}&\text{SE } z_1(t) \text{ é } M_{i1} \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_{ip}\\ &\quad \text{ENTÃO } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)\ ,\ i = 1, \dots, N\end{aligned} \tag{1}$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são variáveis de premissa conhecidas (assumidas como independentes de $u(t)$), $M_{ij}$ é o conjunto nebuloso e $N$ é o número de regras do modelo.

Dado o par $(x(t), u(t))$, as equações do sistema nebuloso são

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i(z(t))\big(A_i x(t) + B_i u(t)\big)}{\sum_{i=1}^{N} w_i(z(t))} \tag{2}$$

em que, para todo $t$,

$$z(t) = [z_1(t)\ \cdots\ z_p(t)]\ ,\ w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}(z_j(t)) \tag{3}$$

O termo $M_{ij}(z_j(t))$ é o grau de pertinência de $z_j(t)$ em $M_{ij}$. O peso $w_i(z(t))$ é tal que $\sum_{i=1}^{N} w_i(z(t)) > 0$, $w_i(z(t)) \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, e pode ser normalizado por

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{N} w_i(z(t))}$$

o que leva a

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(z(t)) = 1\ ,\ \alpha_i(z(t)) \geq 0\ ,\ i = 1, \dots, N$$

e a uma representação politópica para o sistema (veja, por exemplo, (Tuan et al., 2001)), dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha(z(t)))x(t) + B(\alpha(z(t)))u(t)\ ,\\ A(\alpha(z(t))) &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(z(t))A_i\ ,\\ B(\alpha(z(t))) &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(z(t))B_i\ ,\ \alpha(z(t)) \in \mathcal{U}\end{aligned} \tag{4}$$

em que

$$\mathcal{U} = \Big\{[\lambda_1 \cdots \lambda_N] \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1\ ,\ \lambda_i \geq 0\Big\} \tag{5}$$

Considere que a lei de controle $u(t)$ seja dada por um compensador paralelo distribuído, para o qual uma regra de controle $u(t) = K_i x(t)$ é aplicada à correspondente $i$-ésima regra do modelo de Takagi-Sugeno (1). O controlador nebuloso é globalmente representado, para todo $t$, por

$$\begin{aligned} u(t) &= K(\alpha(z(t)))x(t), \\ K(\alpha(z(t))) &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(z(t))K_i \ , \\ K_i \in \mathbb{R}^{m\times n} \ &, \ \alpha(z(t)) \in \mathcal{U} \end{aligned} \tag{6}$$

permitindo escrever o sistema de controle em malha fechada como $\dot{x}(t) = A_{cl}(\alpha(z(t)))x(t)$ com

$$A_{cl}(\alpha(z(t))) = A(\alpha(z(t))) + B(\alpha(z(t)))K(\alpha(z(t)))$$

Da estabilidade quadrática (Boyd et al., 1994), tem-se que se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ resolvendo[1]

$$\begin{aligned} &\big(A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)\big)'P \\ &\quad + P\big(A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)\big) < 0 \ , \ \forall \alpha \in \mathcal{U} \end{aligned} \tag{7}$$

então o sistema em malha fechada é globalmente assintoticamente estável em $x = \mathbf{0}$.

## 3 Resultados preliminares

A determinação simultânea de $P$ e $K(\alpha)$ em (7) é um problema não-convexo. O próximo lema, baseado nas transformações de variáveis utilizadas na estabilizabilidade quadrática (Boyd et al., 1994; Bernussou et al., 1989), fornece uma condição convexa equivalente a (7).

**Lema 1** *Existe uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e um ganho de controle linearmente dependente de parâmetros $K(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i K_i$ resolvendo (7) se, e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e uma matriz linearmente dependente de parâmetros $Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z_i$, $Z_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que*

$$A(\alpha)W + WA(\alpha)' + B(\alpha)Z(\alpha) + Z(\alpha)'B(\alpha)' < 0 \ , \quad \forall \alpha \in \mathcal{U} \tag{8}$$

**Prova:** Se existirem $P$ e $K(\alpha)$ resolvendo (7), então, pré e pós-multiplicando (7) por $P^{-1}$ e levando em conta as transformações de variáveis $P^{-1} = W$ e $Z(\alpha) = K(\alpha)W$, tem-se (8), e vice-versa. A transformação de variáveis $Z(\alpha) = K(\alpha)W$ determina que $K(\alpha)$ e $Z(\alpha)$ têm a mesma forma de dependência em $\alpha$ que, no caso, é linear. □

Note que a condição do Lema 1 é uma LMI dependente de parâmetros que deve ser resolvida por meio da determinação de $W$ e $Z_i$, $i = 1, \ldots, N$ que satisfazem (8) $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ (i.e. um problema de dimensão infinita). Condições convexas de dimensão finita para resolver (8) têm sido fornecidas na literatura explorando o fato de que o lado esquerdo de (8) pode ser escrito como uma expressão quadraticamente dependente de parâmetros dada por (veja, por exemplo, (Tanaka and Wang, 2001, Section 3.3))

$$T(\alpha) \triangleq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 T_i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \alpha_i \alpha_j T_{ij} \ , \ \forall \alpha \in \mathcal{U} \tag{9}$$

em que

$$T_i = A_i W + W A_i' + B_i Z_i + Z_i' B_i' \tag{10}$$

$$\begin{aligned} T_{ij} &= (A_i + A_j)W + W(A_i + A_j)' \\ &\quad + B_i Z_j + B_j Z_i + Z_j' B_i' + Z_i' B_j' \end{aligned} \tag{11}$$

Como os parâmetros $\alpha_i$, $i = 1, \ldots, N$ são não-negativos, uma maneira simples de assegurar $T(\alpha) < 0$, $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ é determinar $W$ e $Z_i$ tais que $T_i < 0$, $i = 1, \ldots, N$ and $T_{ij} < 0$, $i = 1, \ldots, N-1$, $j = i+1, \ldots, N$. Pela inspeção de (9), pode-se notar que $T_i < 0$, $i = 1, \ldots, N$ é uma condição necessária para $T(\alpha) < 0$, $\forall \alpha \in \mathcal{U}$. Entretanto, impor $T_{ij} < 0$, $i = 1, \ldots, N-1$, $j = i+1, \ldots, N$ é uma fonte de conservadorismo. Utilizando propriedades de formas quadráticas em $\alpha$, $\alpha \in \mathcal{U}$, LMIs relaxadas para resolver (8) foram propostas, como por exemplo as LMIs dadas em (Tanaka and Wang, 2001, Section 3.3) e (Tuan et al., 2001, Theorem 2.2), mas essas condições (como outras condições no contexto da estabilizabilidade quadrática para sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno) são condições apenas suficientes para assegurar (8).

A próxima seção apresenta os resultados principais do artigo, porém antes algumas definições e notações são necessárias. Defina $\mathcal{K}(d)$ como o conjunto de ênuplas obtidas por todas as possíveis combinações de $p_1 p_2 \cdots p_N$, $p_j \in \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+$ denota inteiros não-negativos) $j = 1, \ldots, N$ tal que $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = d$. $\mathcal{K}_\ell(d)$ é a $\ell$-ésima ênupla de $\mathcal{K}(d)$, que é lexicamente ordenado, $\ell = 1, \ldots, J(d)$. Para um $N$ fixo, o número de elementos de $\mathcal{K}(d)$ é dado por $J(d) = (N+d-1)!/(d!(N-1)!)$ e os coeficientes multinomiais associados são $\mathcal{C}^\ell(d) = d!/(p_1! p_2! \cdots p_N!)$, $p_1 p_2 \cdots p_N = \mathcal{K}_\ell(d)$, $\ell = 1, \ldots, J(d)$. Como um exemplo, para $N = 3$ e $d = 2$, tem-se $J(2) = 6$, $\mathcal{K}(2) = \{002, 011, 020, 101, 110, 200\}$ e coeficientes $\mathcal{C}^\ell(d) = \{1, 2, 1, 2, 2, 1\}$. Finalmente, defina os coeficientes multinomiais modificados

$$\mathcal{C}_i^\ell(d,2) = \begin{cases} \dfrac{d!}{p_1! \cdots (p_i - 2)! \cdots p_N!} & , \text{ se } p_i - 2 \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_{ij}^\ell(d,1,1) = \begin{cases} \dfrac{d!}{p_1! \cdots (p_i - 1)! \cdots (p_j - 1)! \cdots p_N!} & , \text{se} \begin{cases} p_i - 1 \in \mathbb{Z}_+ \\ p_j - 1 \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

[1] A partir deste ponto, por questão de simplicidade, $\alpha(z(t))$ é representado por $\alpha$ e $x(t)$ é representado por $x$.

todos dependentes de $p_1 p_2 \cdots p_n = \mathcal{K}_\ell(d)$, $\ell = 1, \ldots, J(d)$.

## 4 Resultados principais

**Teorema 2** *Existe uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e um ganho de controle linearmente dependente de parâmetros (6) resolvendo (7) se, e somente se, existe uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes $Z_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $i = 1, \ldots, N$ e $d \in \mathbb{Z}_+$ suficientemente grande tais que*

$$\Gamma_\ell \triangleq \sum_{i=1}^{N} \mathcal{C}_i^\ell(d,2) T_i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \mathcal{C}_{ij}^\ell(d,1,1) T_{ij} < 0, \quad \ell = 1, \ldots, J(d+2) \tag{12}$$

*em que $T_i$ é dado por (10) e $T_{ij}$ é dado por (11). Nesse caso, o controlador estabilizante linearmente dependente de parâmetros é dado por*

$$K(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i K_i \ , \ K_i = Z_i W^{-1} \ , \ i = 1, \ldots, N \tag{13}$$

*sendo $K_i$ o ganho de controle da i-ésima regra do modelo nebuloso de Takagi-Sugeno (1).*

**Prova:** Primeiro, note que a existência de $P$ e de um ganho de controle linearmente dependente de parâmetros (6) resolvendo (7) é equivalente à existência de $W$ e $Z_i$ resolvendo (8). Para provar a necessidade, observe que se $T(\alpha)$ é definida negativa $\forall \alpha \in \mathcal{U}$, então

$$\Gamma(\alpha) = \Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\Big)^d T(\alpha) = \sum_{\ell=1}^{J(d+2)} \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_N^{p_N} \Gamma_\ell \ , \quad p_1 \ldots p_N = \mathcal{K}_\ell(d+2) \tag{14}$$

é definida negativa $\forall \alpha \in \mathcal{U}$, sendo $\Gamma_\ell$ em (14) dado por (12). Da extensão do Teorema de Pólya em (Oliveira and Peres, 2005), tem-se que sempre existe um $d \in \mathbb{Z}_+$ suficientemente grande tal que todos os termos $\Gamma_\ell$ dados por (12) são definidos negativos. Para provar a suficiência, nota-se que se os termos $\Gamma_\ell$, $\ell = 1, \ldots, J(d+2)$ no Teorema 2 são definidos negativos, então, baseado em (14), $T(\alpha) < 0$, $\forall \in \mathcal{U}$. □

Como um primeiro comentário referente ao Teorema 2, tem-se que para qualquer $d \in \mathbb{Z}_+$ dado (chamado grau de relaxação das LMIs), o Teorema 2 fornece um conjunto finito de LMIs que pode ser resolvido em tempo polinomial por meio de algoritmos baseados em pontos interiores (Gahinet et al., 1995).

Outra observação é que se as LMIs do Teorema 2 são factíveis para $d = \hat{d}$, então essas LMIs são factíveis para $d > \hat{d}$, uma vez que as desigualdades (12) para $\hat{d}+1$ podem ser reescritas como combinações positivas das desigualdades (12) para $\hat{d}$. Por outro lado, se as LMIs do Teorema 2 não são factíveis para $\hat{d}$, então tais LMIs se tornarão factíveis para algum $d > \hat{d}$ (um limitante para $d$ é dado em (Powers and Reznick, 2001)) sempre que o sistema for quadraticamente estabilizável por meio de um ganho linearmente dependente de parâmetros (i.e., sempre que $T(\alpha) < 0$, $\forall \alpha \in \mathcal{U}$ com $T(\alpha)$ dado por (9)).

Note que o aumento de $\hat{d}$ para $\hat{d}+1$ não introduz novas variáveis escalares nas LMIs do Teorema 2, mas aumenta o número de LMIs a ser testado, sendo que o conjunto de LMIs para $\hat{d}+1$ é sempre menos conservador do que o conjunto de LMIs para $\hat{d}$. Para ilustrar esse fato, considere o caso em que $N = 2$, o que leva aos seguintes termos $T_i$ e $T_{ij}$ no Teorema 2:

$$T_1 = A_1 W + W A_1' + B_1 Z_1 + Z_1' B_1'$$

$$T_2 = A_2 W + W A_2' + B_2 Z_2 + Z_2' B_2'$$

$$T_{12} = (A_1 + A_2) W + W (A_1 + A_2)' + B_1 Z_2 + B_2 Z_1 + Z_2' B_1' + Z_1' B_2'$$

As LMIs (12) para $d = 0$ até $d = 2$ são:

$$T_1 < 0 \ , \ T_2 < 0 \ , \ T_{12} < 0 \ , \ \text{para } d = 0$$

$$T_1 < 0 \ , \ T_2 < 0 \ , \ T_1 + T_{12} < 0 \ , \ T_2 + T_{12} < 0, \ \text{para } d = 1$$

$$T_1 < 0 \ , \ T_2 < 0 \ , \ 2T_1 + T_{12} < 0 \ , \ 2T_2 + T_{12} < 0 \ , \ T_1 + T_2 + 2T_{12} < 0 \ , \ \text{para } d = 2$$

Nota-se, por exemplo, que o conjunto de LMIs para $d = 1$ é menos conservador do que o conjunto de LMIs para $d = 0$. Além disso, observa-se que se as LMIs para $d = 0$ são factíveis, então a factibilidade também ocorrerá para $d = 1$. O mesmo ocorre com $d$ e $d+1$ para um $d$ arbitrário.

**Corolário 3** *Substituindo* 0 *no lado direito de (12) por $-2\sigma W$ e então resolvendo o problema de autovalores generalizados dado por* $\max \sigma$ *sujeito às LMIs modificadas, tem-se que os ganhos de controle resultantes asseguram a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada com uma taxa de decaimento $\sigma$ para todas as trajetórias $x(t)$.*

**Prova:** Se (12), com 0 substituído por $-2\sigma W$, é factível para algum $\sigma > 0$, tem-se

$$A_{cl}(\alpha) W + W A_{cl}(\alpha)' < -2\sigma W$$

que, pré e pós-multiplicada por $W^{-1}$, com $W^{-1} = P$ torna-se

$$A_{cl}(\alpha)' P + P A_{cl}(\alpha) < -2\sigma P$$

o que significa que $\dot{v}(x) < -2\sigma v(x)$, com $v(x) = x'Px$, portanto assegurando a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada com uma taxa de decaimento $\sigma$. □

A próxima seção fornece comparações numéricas entre as condições propostas e outras LMIs relaxadas dadas na literatura para resolver (8).

## 5 Exemplos numéricos

A complexidade numérica associada a um problema de otimização baseado em LMIs pode ser estimada a partir do número $\mathcal{V}$ de variáveis escalares e do número $\mathcal{L}$ de linhas de LMIs. As condições do Teorema 2 demandam $\mathcal{V} = n(n+1)/2 + mnN$, $\mathcal{L} = n + nJ(d+2)$. Note que $\mathcal{V}$ não depende de $d$. Os resultados apresentados a seguir foram obtidos utilizando o *LMI Control Toolbox*, do Matlab (Gahinet et al., 1995) em um *notebook* com um processador Core Duo 1.66 GHz e com 1 GB de memória RAM.

### Exemplo 1

Considere o modelo nebuloso de Takagi-Sugeno (1) com $N = 4$ subsistemas cujas matrizes são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.77 & 0.24 & 0.67 \\ 0.19 & 0.62 & 0.68 \\ 0.42 & 0.42 & 0.48 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.08 \\ 0.76 & 0.74 \\ 0.74 & 0.58 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.14 & 0.57 \\ 0.08 & 0.88 & 0.85 \\ 0.17 & 0.85 & 0.83 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.14 \\ 0.66 & 0.67 \\ 0.84 & 0.16 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.77 & 0.51 & 0.05 \\ 0.04 & 0.35 & 0.71 \\ 0.92 & 0.73 & 0.57 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.53 & 0.08 \\ 0.95 & 0.58 \\ 0.24 & 0.98 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.28 & 0.60 \\ 0.97 & 0.48 & 0.53 \\ 0.30 & 0.34 & 0.08 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0.13 & 0.71 \\ 0.80 & 0.46 \\ 0.09 & 0.82 \end{bmatrix}$$

Primeiramente, verificou-se que as condições relaxadas para projeto do controlador dadas em (Tanaka and Wang, 2001, Section 3.3) (com $s = N$) não são factíveis para este sistema. A factibilidade também não é obtida pelas condições relaxadas dadas em (Tuan et al., 2001, Theorem 2.2, item 1). As condições do Teorema 2 fornecem conjuntos de LMIs progressivamente relaxados que resolvem o problema de estabilizabilidade quadrática sempre que houver uma solução. Para o sistema deste exemplo, as condições do Teorema 2 não são factíveis para $d = 0$, tornando-se factíveis para $d \geq 1$, portanto fornecendo novas informações quando comparadas a condições relaxadas da literatura. Para $d = 1$, as LMIs do Teorema 2 usam 30 variáveis escalares e 63 linhas de LMIs, sendo resolvidas em 0.45 segundos, assegurando a estabilidade do sistema em malha fechada por meio da matriz de Lyapunov

$$P = \begin{bmatrix} 16.6429 & -7.1096 & 2.8415 \\ -7.1096 & 3.0417 & -1.2181 \\ 2.8415 & -1.2181 & 0.4938 \end{bmatrix}$$

### Exemplo 2

Como um exemplo da literatura, considere o sistema não-linear apresentado em (Tanaka and Wang, 2001, Section 4.3), descrito por meio de um modelo nebuloso de Takagi-Sugeno com quatro regras. O objetivo aqui é investigar a estabilização quadrática do sistema maximizando a taxa decaimento das trajetórias dos estados, conforme descrito no Corolário 3. As condições do Teorema 2 asseguram a estabilidade com $\max \sigma = 3.484$ para $d = 0$, não mostrando melhora significativa nos resultados com o aumento de $d$, indicando que esse valor de taxa de decaimento é o limite possível de ser obtido sob a estabilidade quadrática (9). As condições do Teorema 2 usam 26 variáveis escalares, 44 linhas de LMIs e demandam 0.75 segundos para obter o resultado apresentado neste exemplo.

## 6 Conclusão

Este artigo fornece um procedimento sistemático de construção de conjuntos de LMIs progressivamente menos conservadores que são necessários e suficientes para computar ganhos de controle por realimentação de estados dependentes de parâmetros que estabilizam quadraticamente sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno, levando a resultados menos conservadores do que condições relaxadas da literatura.

## Agradecimentos

Às agências FAPESP e CNPq, pelo apoio financeiro.

## Referências

Bernussou, J., Peres, P. L. D. and Geromel, J. C. (1989). A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems, *Syst. Contr. Lett.* **13**(1): 65–72.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

Cao, Y. and Frank, P. M. (2000). Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **8**(2): 200–211.

Chen, B., Tseng, C. and Uang, H. (1999). Robustness design of nonlinear dynamic systems via fuzzy linear control, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **7**(5): 571–585.

Chen, B., Tseng, C. and Uang, H. (2000). Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: an LMI approach, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **8**(3): 249–265.

Feng, G. (2003). Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(5): 605–612.

Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **14**(5): 676–697.

Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox User's Guide*, The Math Works Inc., Natick, MA.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G. (1952). *Inequalities*, 2 edn, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Johansson, M. (2003). *Piecewise Linear Control Systems — A Computational Approach*, Vol. 284 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany.

Johansson, M., Rantzer, A. and Arzen, K. E. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **7**(6): 713–722.

Kim, E. and Lee, H. (2000). New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **8**(5): 523–534.

Kumar, P. P., Kar, I. and Behera, L. (2006). Variable-gain controllers for nonlinear systems using the T-S fuzzy model, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B* **36**(6): 1442–1449.

Lian, K., Chiang, T., Chiu, C. and Liu, P. (2001). Synthesis of fuzzy model-based designs to synchronization and secure communications for chaotic systems, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B* **31**(1): 66–83.

Nguang, S. K. and Shi, P. (2003). $\mathcal{H}_\infty$ fuzzy output feedback control design for nonlinear systems: an LMI approach, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(3): 331–340.

Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2005). Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions, *Lin. Alg. Appl.* **405**: 209–228.

Powers, V. and Reznick, B. (2001). A new bound for Pólya's Theorem with applications to polynomials positive on polyhedra, *J. Pure Appl. Alg.* **164**: 221–229.

Scherer, C. W. (2005). Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **27**(2): 365–395.

Scherer, C. W. and Hol, C. W. J. (2006). Matrix sum-of-squares relaxations for robust semidefinite programs, *Mathematical Programming Series B* **107**(1–2): 189–211.

Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653. URL: http://sedumi.mcmaster.ca/.

Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1996). Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, $\mathcal{H}_\infty$ control theory, and linear matrix inequalities, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **4**(1): 1–13.

Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1998a). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(2): 250–265.

Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1998b). A unified approach to controlling chaos via an LMI-based fuzzy control system design, *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **45**(10): 1021–1040.

Tanaka, K. and Wang, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Avellar, R. G. (2003). On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(5): 613–623.

Tuan, H. D., Apkarian, P., Narikiyo, T. and Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **9**(2): 324–332.

Wang, H. O., Tanaka, K. and Griffin, M. F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **4**(1): 14–23.

Xu, S. and Lam, J. (2005). Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain discrete-time-delay fuzzy systems via output feedback controllers, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **13**(2): 82–93.